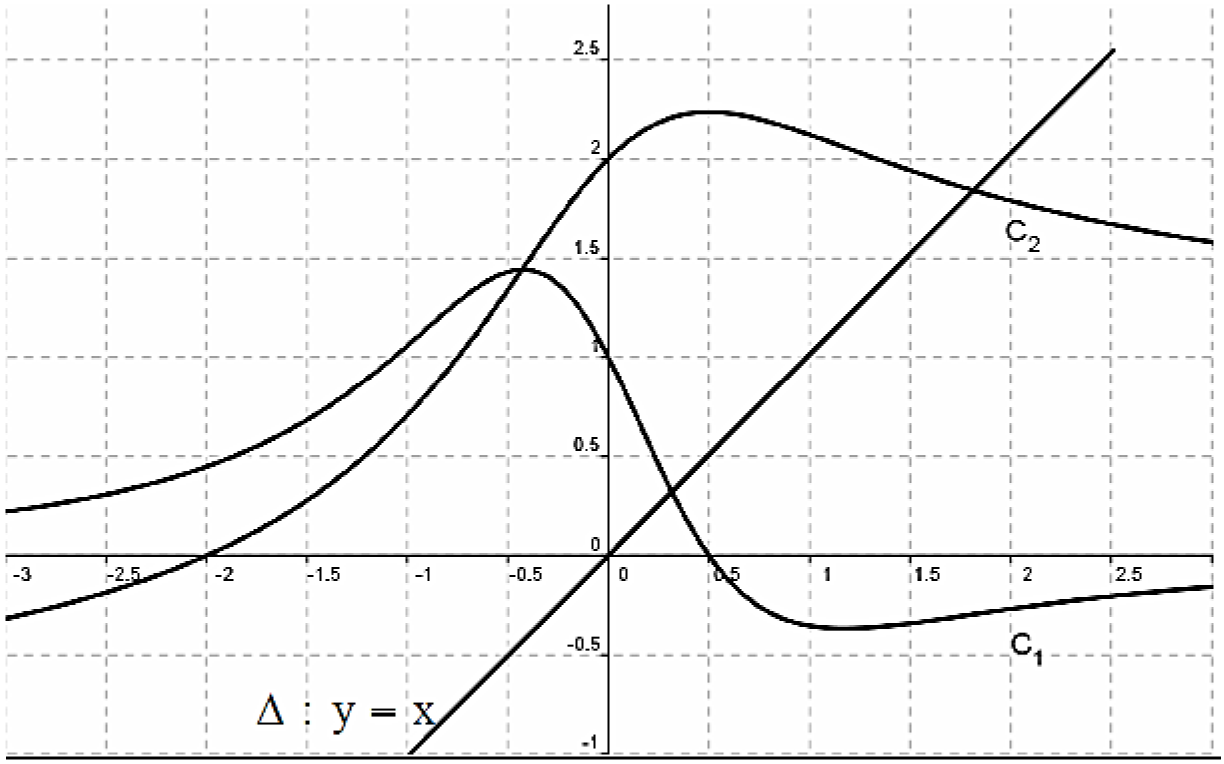
REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION **LYCEE BIR LAHMAR** **AS : 2017/2018** **Prof : GARI. Habib**	**Discipline : Mathématiques** **Section: 4ieme maths** **Durée : 3 heures** — **Coefficient : 4** Devoir de synthèse n°1

Exercice n°1 : (4 points)

Dans la figure ci-dessous, C_1 et C_2 sont les courbes représentatives d'une fonction f définie sur [-3,3] et de sa fonction dérivée f'



Utiliser le graphique ci-dessus comme source des données pour répondre aux questions suivantes

1. /Justifier que C_1 ne peut pas être la courbe de f .

2. /Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-2}{x}$

3. /Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\left]\dfrac{3}{2}, 2\right[$ une solution unique α.

4. / Soit U la suite définie par : $U_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout entier naturel n on a $U_{n+1} = f\left(U_n\right)$

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\dfrac{3}{2} \leq U_n \leq 2$

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$

   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice n°2 : (3.5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{U},\vec{V}\right)$.

On appelle g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=i\left(\overline{z}\right)+i+1$

1) Montrer que g est une isométrie.
2) a) Montrer que g n'admet pas des points fixes.
   b) En déduire que g est une symétrie glissante.
3) On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A= 1$, $Z_B=1+i$, $Z_C=1+2i$ et $Z_D=3+2i$
   a) Déterminer $g(A)$ et $(g \circ g)(A)$
   b) Caractériser alors g

Exercice n°3 : (5.5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB=2AD

On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A)=C$ et $f(\mathrm{I})=J$
   b) Caractériser f
2) soit $g=R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}\circ f$
   a) Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.
   b) Déterminer $g(A)$ et $g(\mathrm{I})$
   c)En déduire que le centre Ω de g est le milieu du segment $[ID]$
3) Soit h l'antidéplacement tel que h(A)=C et h(I)=J
   a) Montrer que h(B)=D
   b) Soit E=h(C). Montrer que DJ=DE et que $\left(\widehat{\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{DE}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$
   c) En déduire que D est le milieu du segment $[AE]$
   d) Montrer alors que h est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice n°4(7 points)

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-1}+x$

1) a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

   b. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2.) Dresser le tableau de variation de f .

3.) a. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

   b. Montre que pour tout x appartenant à J ; $f^{-1}(x)=\dfrac{1+x^2}{2x}$.

4.) On désigne par (C) et (C') les courbes représentatives de f et d f^{-1}e dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

   a. Montrer que la droite d'équation y = 2x est une asymptote oblique à (C).

   b. Construire les courbes (C) et (C')

5) Soit la fonction g définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$

   a. Montrer que pour tout x appartenant à $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $g(x)=\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

   b. Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, sur un intervalle K à préciser

   c. Montrer que $\left(g(y)=x, et\ y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)\Leftrightarrow\left(\cos y=\dfrac{2x}{1+x^2}\quad et\quad x\in[1+\infty[\right)$

   d. Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et pour tout x appartenant à K on a : $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$

6) On pose $U_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}g^{-1}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$ $,n\in ¥^*$

   a. Montrer que pour tout $n\in ¥^*$ on a : $g^{-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\le U_n\le g^{-1}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$

   b. En déduire que la suite U est convergente et donner sa limite

Bon travail ²